

DO MULTIPLICADOR DE LAGRANGE AOS ESPAÇOS MÉTRICOS E TOPOLÓGICOS: ENSINO DE APLICAÇÕES À TV^λ

FROM THE LAGRANGE MULTIPLIER TO METRIC AND TOPOLOGICAL SPACES:
TEACHING APPLICATIONS TO THE TV^λ

DEL MULTIPLICADOR DE LAGRANGE A LOS ESPACIOS MÉTRICOS Y
TOPOLÓGICOS: ENSEÑANZA DE APLICACIONES A LA TV^λ

Rilton Gonçalo Bonfim Primo¹, José Félix García Rodríguez²

DOI: 10.54899/dcs.v23i93.6563

Recibido: 10/07/2026 | Aceptado: 04/08/2026 | Publicación en línea: 11/08/2026.

RESUMO

Este artigo articula ferramentas de Análise Matemática — multiplicadores de Lagrange, espaços métricos e topológicos, integração funcional e funcionais não-locais — como recurso pedagógico para o ensino avançado e como base quantitativa para debates clássicos da Economia Política sobre valor, troca e distribuição. Parte-se de um modelo de alocação de tempo individual, resolvido por lagrangeano, no qual o multiplicador λ adquire interpretação econômica como dispêndio vital marginal. Em seguida, o modelo é estendido do discreto para o contínuo, via espaços métricos completos e integração funcional sobre uma variedade social, permitindo tratar a agregação de m agentes e n atividades. Por fim, propõe-se um Funcional de Ação Vital que incorpora interação não-local, fricção institucional e memória histórica (histerese), cuja minimização — o Princípio da Mínima Ação Vital — gera, via equações de Euler-Lagrange, as trajetórias alocativas da sociedade como geodésicas em uma variedade deformada por relações de poder. O trabalho conclui apontando uma agenda de pesquisa numérica e pedagógica futura, integrando rigor matemático e sensibilidade epistemológica na formação de pesquisadores em Economia Política.

Palavras-chave: Multiplicador de Lagrange. Espaços Topológicos. Teoria do Valor Lambda (TV^λ). Economia Política.

ABSTRACT

This article combines tools from Mathematical Analysis — Lagrange multipliers, metric and topological spaces, functional integration, and non-local functionals — as both a pedagogical resource for advanced teaching and a quantitative basis for classical debates in Political Economy on value, exchange, and distribution. The argument begins with an individual time-allocation model solved via a Lagrangian, in which the multiplier λ acquires an economic interpretation as the marginal vital expenditure. The model is then extended from the discrete to the continuous

¹ Doutor em Engenharia Industrial, Universidade Federal da Bahia, Salvador, Bahia, Brasil.

E-mail: rilton@ufba.br

² Doutor em Finanças Públicas, Faculdade de Economia, Universidade Veracruzana, Veracruz, México.

E-mail: jfgr55@hotmail.com Orcid: <https://orcid.org/0000-0002-7319-1472>

case, through complete metric spaces and functional integration over a social manifold, allowing the aggregation of m agents and n activities to be treated formally. Finally, a Vital Action Functional is proposed, incorporating non-local interaction, institutional friction, and historical memory (hysteresis); its minimization — the Principle of Minimum Vital Action — yields, via the Euler-Lagrange equations, the allocative trajectories of society as geodesics on a manifold deformed by power relations. The article concludes by outlining a future numerical and pedagogical research agenda, integrating mathematical rigor with epistemological sensitivity in the training of Political Economy researchers.

Keywords: Lagrange Multiplier. Topological Spaces. Lambda Value Theory (TV^λ). Political Economy.

RESUMEN

Este artículo articula herramientas del Análisis Matemático — multiplicadores de Lagrange, espacios métricos y topológicos, integración funcional y funcionales no locales — como recurso pedagógico para la enseñanza avanzada y como base cuantitativa para los debates clásicos de la Economía Política sobre valor, intercambio y distribución. Se parte de un modelo de asignación de tiempo individual, resuelto mediante un lagrangiano, en el que el multiplicador λ adquiere una interpretación económica como gasto vital marginal. El modelo se extiende luego de lo discreto a lo continuo, mediante espacios métricos completos e integración funcional sobre una variedad social, permitiendo tratar la agregación de m agentes y n actividades. Finalmente, se propone un Funcional de Acción Vital que incorpora interacción no local, fricción institucional y memoria histórica (histéresis), cuya minimización — el Principio de Mínima Acción Vital — genera, mediante las ecuaciones de Euler-Lagrange, las trayectorias asignativas de la sociedad como geodésicas en una variedad deformada por relaciones de poder. El trabajo concluye señalando una agenda de investigación numérica y pedagógica futura, que integra rigor matemático y sensibilidad epistemológica en la formación de investigadores en Economía Política.

Palabras clave: Multiplicador de Lagrange. Espacios Topológicos. Teoría del Valor Lambda (TV^λ). Economía Política.



Esta obra está bajo una [Licencia Creative Commons Atribución- NoComercial 4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/)

INTRODUÇÃO

A Análise Matemática ultrapassa a mera execução de procedimentos algorítmicos e constitui-se como a espinha dorsal do pensamento lógico-analítico rigoroso. No campo da Educação Matemática, a disciplina é central para a formação da capacidade de abstração, argumentação e modelagem da realidade (Nascimento, 2013). O ensino progressivo — desde a formalização axiomática de limites e continuidade até o estudo de espaços métricos e topológicos — fornece ao pesquisador as ferramentas conceituais necessárias para compreender processos de

mudança e atuar sobre sistemas complexos de modo refletido e preciso (Apostol, 1974; Rudin, 2012).

A Análise Matemática não é apenas um repertório técnico: é uma linguagem que articula hipóteses, constrói modelos e testa consistência lógica em domínios onde a complexidade social e econômica costuma impedir formalizações precisas. Ao explicitar essa função, o presente trabalho posiciona a matemática como instrumento de tradução entre intuições qualitativas e previsões quantitativas, permitindo que debates clássicos da Economia Política — sobre valor, troca e distribuição — sejam reavaliados à luz de critérios formais de existência, unicidade e estabilidade de soluções (Rudin, 2012; Shaikh, 2016).

A problemática que orienta este trabalho é de natureza metodológica: como transpor teoremas de matemática pura para a modelagem de fenômenos reais e não triviais, reduzindo o hiato entre abstração formal e ciências aplicadas? Tomando a Economia Política como laboratório, busca-se demonstrar que a matemática avançada pode oferecer uma ancoragem quantitativa robusta para debates clássicos sobre origem e medida do valor (Shaikh, 2016; Amin, 1976).

O objetivo geral é evidenciar a eficácia da Análise Matemática na organização e resolução de sistemas teóricos complexos. Objetivos específicos incluem: (i) ilustrar a transição do raciocínio discreto (otimização local via multiplicadores de Lagrange) para o contínuo (espaços topológicos e variedades diferenciáveis); e (ii) empregar a Teoria do Valor Lambda (TV^λ) como modelo prático de aplicação quantitativa, mostrando como λ pode ser interpretado como dispêndio vital marginal por unidade de utilidade equivalente.

DESENVOLVIMENTO E ASPECTOS METODOLÓGICOS

O Método Variacional e o Ensino da Otimização Local

Como etapa introdutória, propõe-se o ensino do *Cálculo Variacional* e da otimização restrita a partir de um modelo pedagógico simples: a alocação de tempo de um indivíduo.

A função objetivo representa a desutilidade total $Ve(L_1, L_2)$, sujeita à restrição $L_1 + L_2 = T$, onde cada L_n são trabalhos alternativos e T é o tempo total disponível. A formulação via lagrangeano evidencia a geometria do problema e facilita a interpretação econômica do multiplicador λ (Spivak, [s.d.]; Apostol, 1974). (Eq.1).

$$\mathcal{L}(L_1, L_2, \lambda) = Ve(L_1, L_2) - \lambda (L_1 + L_2 - T) \quad (1)$$

As condições de primeira ordem, obtidas pela anulação do gradiente de $\mathcal{L}$, igualam as desutilidades marginais e conferem a λ a interpretação de taxa marginal de troca ou dispêndio vital marginal (Eq. 2-4):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L_1} = \frac{\partial Ve}{\partial L_1} - \lambda = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L_2} = \frac{\partial Ve}{\partial L_2} - \lambda = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = -(L_1 + L_2 - T) = 0. \quad (4)$$

Pedagogicamente, essa sequência permite ao estudante perceber a passagem do cálculo elementar para a análise multivariável, mostrando como um objeto técnico (o multiplicador) adquire significado econômico e social quando integrado a uma narrativa interpretativa (D'Ambrosio, 2001; Domite, 2004).

Do Discreto ao Contínuo: Espaços Métricos e Análise Funcional

Quando o modelo microeconômico se amplia — com m agentes e n atividades — as formulações matriciais discretas tornam-se insuficientes. A transição para o contínuo exige a introdução de espaços métricos e de espaços funcionais (por exemplo $L^p(\mathcal{M})$), bem como o uso da teoria da medida e da integração múltipla funcional (Apostol, 1974; Rudin, 2012).

Modela-se a população por uma variável espacial $s \in \mathcal{M}$, onde $\mathcal{M}$ é a *variedade social* e $d(\cdot, \cdot)$ é a *métrica* que mede a distância (ou dissimilaridade) entre dois pontos $s, s' \in \mathcal{M}$. A agregação do dispêndio vital, ao passar do discreto para o contínuo, é então expressa pela integral funcional (Eq. 5).

$$Ve_{\text{total}} = \int_{\mathcal{M}} Ve(L(s)) ds, \quad (5)$$

onde $L(s)$ é a alocação de tempo (ou outra variável de interesse) no ponto s da variedade social; a métrica $d(s, s')$ determina como se mede proximidade entre perfis sociais (por exemplo, diferenças em alocação, produtividade ou preferências) e escolhe-se conforme a interpretação econômica desejada (p.ex., norma L^p para funções agregadas).

Trabalhando em espaços métricos completos e aplicando resultados de convergência e a Lei dos Grandes Números, demonstra-se que flutuações idiossincráticas tendem a se anular no limite, garantindo existência, unicidade e estabilidade da solução agregada. Essa etapa mostra como a abstração topológica resolve problemas de agregação que permanecem insolúveis em modelos estritamente discretos (Rudin, 2012; Spivak, [s.d.]).

RESULTADOS ANALÍTICOS: DEFORMAÇÕES TOPOLÓGICAS E O PRINCÍPIO DA MÍNIMA AÇÃO VITAL

Para incorporar assimetrias estruturais - poder de mercado, fricções institucionais, captura rentista - é necessário introduzir operadores não-locais e funcionais de ação que expressem interdependência sistêmica, para captura das quais, contando-se aí a fricção institucional e a memória dissipativa, a estrutura matemática mais coerente (para o seu *Funcional de Ação Vital* S) assume a forma de uma integral sobre a variedade social $\mathcal{M}$ e o tempo $\mathcal{T}$ (Eq. 6):

$$S = \int_{\mathcal{T}} \int_{\mathcal{M}} \left[\int_{\mathcal{M}} K(s, s') \lambda(s', t) ds' - \frac{\delta Ve}{\delta U_{ua}}(s, t) \Psi(\xi(s)) \exp\left(-\int_0^t \Gamma(t') dt'\right) \right] ds dt \quad (6)$$

Anatomia Analítica da Equação:

- *A Matriz de Interação Não-Local* $\int_{\mathcal{M}} \mathbf{K}(s, s') \lambda(s', t) ds'$: O kernel $K(s, s')$ atua sobre o campo λ , ponderando como o dispêndio vital em um ponto s' afeta as condições de contorno no ponto s . Isso formaliza a natureza sistêmica do valor, rompendo com o isolamento robinsoniano da utilidade marginal neoclássica.
- *O Núcleo Dialético* $\frac{\delta Ve}{\delta U_{ua}}(s, t)$: Expressa a variação funcional do dispêndio vital Ve em relação à utilidade universalmente alienável U_{ua} . É a representação contínua exata da sua definição de λ como dispêndio vital marginal por unidade de utilidade equivalente.

- *Deformação Estrutural e Poder* $\Psi(\xi(s))$: Parametriza as fricções institucionais e assimetrias de poder no ponto s da malha social.
- *Memória e Dissipação* $\exp\left(-\int_0^t \Gamma(t') dt'\right)$: A integral da função $\Gamma(t')$ ao longo do tempo introduz a dependência da trajetória (histerese), garantindo que o valor hoje seja o reflexo histórico das lutas e arranjos produtivos passados.

Ao definirmos a condição de eficiência sistêmica pelo Princípio da Mínima Ação Vital ($\delta S = 0$), as equações de Euler-Lagrange resultantes descreverão exatamente como a alocação social busca sua trajetória (a geodésica) neste espaço topológico deformado pelas relações de poder.

A condição de eficiência sistêmica é dada pelo *Princípio da Mínima Ação Vital*: $\delta S = 0$, cuja aplicação leva às equações funcionais de Euler-Lagrange que governam a dinâmica social agregada. Essa analogia com formalismos da física teórica permite interpretar trajetórias alocativas como geodésicas em uma variedade social deformada pelas relações de poder (Shaikh, 2016).

CONCLUSÃO

A transposição didática do discreto para o contínuo evidencia que ferramentas da Análise Matemática — multiplicadores de Lagrange, espaços métricos completos, integração funcional e funcionais não-locais — são instrumentos robustos para modelar problemas complexos em Economia Política. A formalização de λ como dispêndio vital marginal e a construção do funcional S articulam microdecisões e atratores macroeconômicos, oferecendo tanto um roteiro pedagógico para o ensino avançado quanto uma base quantitativa para debates sobre valor e troca desigual (Amin, 1976; Shaikh, 2016).

A formalização proposta não se limita a um exercício teórico: ela fornece critérios operacionais para avaliar políticas públicas e intervenções institucionais. Em particular, a estrutura funcional permite simular efeitos de políticas redistributivas, choques tecnológicos e mudanças institucionais sobre a geodésica alocativa da sociedade, oferecendo métricas de eficiência e de custo social que podem orientar decisões normativas.

Reconhecem-se, contudo, limitações e escolhas técnicas que exigem investigação adicional: tipo de métrica adotada, regularidade e suporte do kernel K , hipóteses estocásticas e sensibilidade a normas L_p . Propõe-se, portanto, uma agenda futura que inclua: (i) estudos

numéricos e simulações calibradas com dados regionais; (ii) análise de robustez das soluções frente a diferentes normas e kernels; e (iii) desenvolvimento de materiais didáticos e exercícios que permitam a incorporação desses conceitos em disciplinas de graduação e pós-graduação. Assim, o trabalho se apresenta não apenas como contribuição teórica, mas como convite à continuidade investigativa e pedagógica, integrando rigor matemático e sensibilidade epistemológica na formação de pesquisadores (Nascimento, 2013; D'Ambrosio, 2001).

REFERÊNCIAS

- AMIN, S. **Unequal development**: an essay on the social formations of peripheral capitalism. New York: Monthly Review Press, 1976.
- APOSTOL, T. M. **Mathematical Analysis**. 2. ed. Reading, MA: Addison-Wesley, 1974.
- D'AMBROSIO, U. **Educação matemática**: da teoria à prática. 3. ed. Campinas: Papirus, 2001.
- DOMITE, M. C. **Educação matemática e sociedade**: perspectivas para a formação de professores. São Paulo: Ação Educativa, 2004.
- EMMANUEL, A. **Unequal exchange**: a study of the imperialism of trade. New York: Monthly Review Press, 1972.
- NASCIMENTO, M. R. **Educação matemática e formação do pensamento analítico**: da educação básica ao ensino superior. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.
- RUDIN, W. **Princípios de Análise Matemática**. 3. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2012.
- SHAIKH, A. **Capitalism**: competition, conflict, crises. New York: Oxford University Press, 2016.
- SPIVAK, M. **Cálculo**: uma introdução à análise real. 4. ed. Rio de Janeiro: [s.n.], [s.d.].