



## SIMULAÇÃO DA PROPAGAÇÃO DE UM POLUENTE NA ATMOSFERA, COM ONDAS DE CHOQUE

SIMULATION OF THE PROPAGATION OF A POLLUTANT IN THE  
ATMOSPHERE, WITH SHOCK WAVES

SIMULACIÓN DE LA PROPAGACIÓN DE UN CONTAMINANTE EN LA  
ATMÓSFERA, CON ONDAS DE CHOQUE

Rogério Martins Saldanha da Gama<sup>1</sup>

DOI: 10.54899/dcs.v23i88.4837

Recibido: 02/02/2026 | Aceptado: 26/02/2026 | Publicación en línea: 05/03/2026.

### RESUMO

Tendo como objetivo a descrição de fenômenos de transporte em uma atmosfera contendo um poluente, e supondo o transporte radial deste poluente e a atmosfera como um gás isotérmico ideal, este trabalho apresenta um sistema hiperbólico não linear composto por três equações diferenciais parciais que representam a conservação de massa e momento linear para a mistura ar-poluente e o balanço de massa para o poluente. A natureza hiperbólica do sistema exige um método numérico capaz de lidar com descontinuidades. Nesse contexto, o esquema de Glimm foi escolhido para a simulação numérica, combinado com uma técnica de fatoração de operadores para considerar a parte não homogênea do sistema de equações, que surge naturalmente da geometria esférica do problema.

**Palavras chave:** Ondas de Choque. Propagação de Poluentes. Método de Glimm.

### ABSTRACT

Aiming to describe transport phenomena in an atmosphere containing a pollutant, assuming radial transport of the pollutant and the atmosphere as an ideal isothermal gas, this work yields a nonlinear hyperbolic system of three partial differential equations that represent mass and momentum conservation for the air-pollutant mixture and the pollutant mass balance. The hyperbolic nature of the system demands a numerical method capable of handling discontinuities. In this context, Glimm's scheme is naturally chosen for the numerical simulation, combined with an operator-splitting technique to account for the non-homogeneous portion of the operator, arising naturally from the problem's spherical geometry.

**Keywords:** Shock Waves. Pollutant Propagation. Glimm Method.

<sup>1</sup> Doutor em Engenharia Mecânica, Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil. E-mail: rsgama@gmail.com

## RESUMEN

Con el objetivo de describir los fenómenos de transporte en una atmósfera que contiene un contaminante, y asumiendo el transporte radial de este contaminante y la atmósfera como un gas isotérmico ideal, este trabajo presenta un sistema hiperbólico no lineal compuesto por tres ecuaciones diferenciales parciales que representan la conservación de la masa y el momento lineal para la mezcla aire-contaminante, así como el balance de masa del contaminante. La naturaleza hiperbólica del sistema requiere un método numérico capaz de manejar discontinuidades. En este contexto, se eligió el esquema Glimm para la simulación numérica, combinado con una técnica de factorización de operadores para considerar la parte no homogénea del sistema de ecuaciones, que surge naturalmente de la geometría esférica del problema.

**Palabras clave:** Ondas de Choque. Propagación de Contaminantes. Método Glimm.



Esta obra está bajo una [Licencia Creative Commons Atribución- NoComercial 4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/)

---

## INTRODUÇÃO

O estudo da poluição do ar é um tema atual e de grande relevância. Certos incidentes isolados podem levar a uma liberação em larga escala de poluentes na atmosfera, colocando em risco direto a saúde das pessoas.

Neste trabalho, modelamos a propagação de um poluente através da atmosfera, partindo de uma distribuição inicial de densidades e velocidades e admitindo processo puramente advectivo.

Um modelo hiperbólico preliminar para o transporte radial de um poluente (Perkins, 1974) em uma atmosfera isotérmica é considerado neste trabalho (Jacobson, 2000). A representação matemática resultante desse fenômeno é um sistema hiperbólico não linear de equações diferenciais – a saber, as leis de conservação de massa e momento linear para a mistura ar-poluente, bem como o balanço de massa do poluente.

Após algumas simplificações, obtém-se um conjunto de três equações diferenciais parciais não lineares, representando os balanços de massa e momento linear para o ar, bem como o balanço de massa do poluente, com as incógnitas sendo a densidade e a velocidade do ar e o campo de concentrações do poluente.

A natureza deste problema matemático não permite, em geral, soluções clássicas, nas quais as equações diferenciais são verificadas em cada ponto espacial, exigindo uma ampliação

do espaço de soluções admissíveis, para permitir a presença de descontinuidades que satisfaçam um determinado critério de solução, dado pela condição de entropia, além de satisfazer uma formulação fraca das equações de conservação.

A característica hiperbólica deste sistema sugere que ele pode ser aproximado usando um método numérico especificamente projetado para problemas apresentando descontinuidades, preservando a magnitude e a posição das ondas de choque. Sua simulação é realizada seguindo um conjunto de procedimentos sistemáticos que consistem em três etapas distintas – a saber, a construção de um esquema de Glimm para evolução temporal com condição inicial arbitrária, a solução generalizada completa do problema de Riemann associado (já que a implementação do esquema de Glimm requer, para cada passo de tempo, a solução de um problema de Riemann para a evolução no tempo) e a partição do operador em uma parte hiperbólica e uma parte ordinária.

Esta técnica de fatoração de operadores – necessária devido à natureza intrinsecamente não homogênea do problema, resultante de sua geometria esférica – é uma ferramenta simples e eficaz que trata um problema simultâneo como um problema sequencial. Realiza-se uma decomposição em duas partes do operador definido no sistema hiperbólico, de modo que a parte meramente hiperbólica do operador – ou seja, o problema homogêneo associado – seja separada de sua parte puramente temporal evolutiva.

Esta técnica já foi empregada com sucesso para aproximar outros problemas hiperbólicos não lineares, como a propagação de ondas em um tubo elasto-viscoplástico danificável e o escoamento através de meios porosos não saturados. Alguns resultados numéricos representativos são apresentados para ilustrar as respostas tanto do modelo proposto quanto do procedimento numérico.

## **MODELO MECÂNICO**

O transporte de um poluente no ar é descrito considerando-se a conservação da massa e do momento linear para a mistura ar-poluente e o balanço de massa para o poluente, juntamente com algumas simplificações. Primeiramente, supõe-se que a transferência de massa é causada por um processo de advecção-difusão do poluente, doravante denominado constituinte A, no ar, que é considerado um gás ideal (desprezando-se todos os efeitos da viscosidade). As suposições acima mencionadas levam ao seguinte modelo mecânico para descrever o transporte advectivo-difusivo

de um poluente no ar:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) &= 0 \\ \rho \left[ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{v}) \mathbf{v} \right] &= \frac{\partial (\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) = -\nabla p + \rho \mathbf{g} \\ \rho \left[ \frac{\partial \omega_A}{\partial t} + (\nabla \omega_A) \cdot \mathbf{v} \right] &= \frac{\partial (\rho \omega_A)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \omega_A \mathbf{v}) = \nabla \cdot (\rho D \nabla \omega_A) + r_A \end{aligned} \quad (1)$$

onde

$\rho$  representa a densidade da mistura,

$\mathbf{v}$  representa a sua velocidade,

$p$  a pressão e

$\mathbf{g}$  a força específica (considerando os efeitos gravitacionais) que atua sobre a mistura. A concentração do constituinte A na mistura,  $\omega_A$ , é definida como a fração mássica desse constituinte na mistura e é expressa pela seguinte equação  $\omega_A \equiv \rho_A / \rho$ .

Além disso,  $D$  representa o coeficiente de difusão do constituinte A na mistura e  $r_A$  a taxa de produção do constituinte A. A simplificação mais importante consiste em supor a presença de uma quantidade suficientemente pequena do constituinte A na mistura, em qualquer instante de tempo, de modo que as equações de balanço de massa e de momento linear para a mistura possam ser aproximadas pelos balanços de massa e de momento linear para o ar. Essa simplificação permite uma redefinição conveniente de algumas variáveis –  $\rho$  é considerada a densidade de massa do ar,  $\mathbf{v}$  a sua velocidade e  $p$  e  $\mathbf{g}$  a pressão e a força específica que atuam sobre o ar.

Neste ponto, é importante mencionar outras simplificações a serem consideradas neste trabalho. Primeiramente, na ausência de reações químicas que possam alterar a quantidade do constituinte com a concentração  $\omega_A$ , segue-se que a produção do constituinte A é suposta nula (ou seja  $r_A = 0$ ). Além disso, a pressão é considerada como sendo uma função linear apenas da densidade  $\rho$ ,  $p = \hat{p}(\rho)$ , sendo sua derivada em relação a  $\rho$ , denotada por  $p'$ , constante e positiva.

Em um fluxo radial unidimensional, o campo de velocidade pode ser reduzido a uma única

componente na direção do fluxo,  $\mathbf{v} = v\mathbf{e}_r$ . Além disso, os efeitos gravitacionais serão desprezados – uma hipótese razoável para um fluxo radial – e, finalmente, a difusão pode ser negligenciada em comparação com a advecção – esta última suposição sendo expressa considerando o coeficiente de difusão  $D = 0$ , o que é admissível para uma explosão isotrópica.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial r} &= -\frac{2\rho v}{r} \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial r}(\rho v^2 + p) &= -\frac{2\rho v^2}{r} \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho \omega_A) + \frac{\partial}{\partial r}(\rho \omega_A v) &= -\frac{2\rho v \omega_A}{r} \end{aligned} \quad (2)$$

onde

$r$  representa a variável radial usual (sistema esférico de coordenadas) e  
 $v$  representa a componente radial da velocidade.

O sistema (2) pode ser reescrito, de forma mais conveniente, como

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial r} &= -\frac{2}{r} G \\ \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{G^2}{F} + p \right) &= -\frac{2}{r} \frac{G^2}{F} \\ \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{GH}{F} \right) &= -\frac{2}{r} \frac{GH}{F} \end{aligned} \quad (3)$$

onde

$$F \equiv \rho, \quad G \equiv \rho v \quad \text{e} \quad H \equiv \rho \omega_A.$$

Neste ponto, é importante observar que, para resolver o problema acima, são necessários dados iniciais para a densidade de massa, velocidade e concentração do poluente. Eventualmente, condições de contorno também podem ser empregadas na solução.

## O ESQUEMA NUMÉRICO

Nesta seção, um esquema desenvolvido para simular problemas hiperbólicos não lineares é empregado para obter aproximações numéricas para o sistema não linear de equações diferenciais parciais descrito nas equações (3). Dois ingredientes principais foram usados para atingir esse objetivo: uma técnica de decomposição de operadores com o esquema de Glimm, que tem sido empregado com sucesso para simular outros problemas hiperbólicos não lineares. O procedimento consiste em uma decomposição do operador de forma que sua parte meramente hiperbólica seja separada de sua parte puramente evolutiva no tempo. O método de Glimm, desenvolvido especificamente para lidar com problemas hiperbólicos não lineares, consiste em percorrer, de um tempo  $n$  a um tempo  $n+1$ , a solução do problema de Riemann associado a cada dois passos de tempo consecutivos. Ele se baseia em uma teoria cuja formulação matemática possui uma sólida base termodinâmica, expressa pela condição de entropia (Smoller, 1983). Uma ampla gama de problemas hiperbólicos não lineares já foi simulada combinando o esquema de Glimm e uma técnica de divisão de operadores, entre os quais estão a propagação de ondas em gasodutos, a propagação de choques em problemas de dinâmica de gases e a propagação de ondas em cavitação isotérmica em tubos (ver Assumpção et al., 2024 e referências ali citadas). Outros exemplos relevantes que poderiam ser citados são a resposta de barras elásticas não lineares (Saldanha da Gama, 1990) e o fluxo isotérmico e não isotérmico de fluidos ideais ou newtonianos através de meios porosos não saturados – abrangendo a maioria dos casos unidimensionais de interesse (ver Martins-Costa e Saldanha da Gama, 2001; e referências ali citadas). É notável que os problemas abordados nesses trabalhos, devido à sua natureza hiperbólica, não requerem condições de contorno. Eles são essencialmente problemas de valor inicial (John, 1982).

O método de Glimm, que lida com a parte homogênea do operador hiperbólico representado na equação (3), emprega a solução do problema de Riemann associado para avançar de um tempo  $n$  para um tempo  $n+1$ . Antes de usar o esquema de Glimm para resolver as equações (3) com dados iniciais apropriados, a solução do problema de Riemann associado deve ser conhecida. Em resumo, o método de Glimm permite construir uma solução para um problema de valor inicial – ou seja, sistemas hiperbólicos não lineares sujeitos a dados iniciais arbitrários – por meio da solução de um certo número de problemas de Riemann associados. A condição inicial arbitrária dada por uma função da posição  $x$  é aproximada por funções constantes por partes, conhecidas como funções degrau – degraus de mesma largura. Na sequência, um problema de

Riemann – um problema de valor inicial cuja condição inicial deve ser uma função degrau – deve ser resolvido para cada dois passos consecutivos. A ideia principal por trás do método é calcular adequadamente a solução de tantos problemas de Riemann quanto desejado, avançando sucessivamente do instante  $t = t_n$  para o instante  $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ .

O primeiro passo consiste em obter uma aproximação inicial para  $(F, G, H)$  avançando no tempo através da parte homogênea (meramente hiperbólica) do operador pelo método de Glimm, usando os valores de  $(F, G, H)$  no tempo  $t = t_n$  como dados iniciais. A aproximação numérica para a solução no tempo é então obtida avançando no tempo com o mesmo passo de tempo  $\Delta t$  através do sistema puramente evolutivo no tempo. Este procedimento é repetido até que o tempo de simulação especificado seja atingido.

O procedimento numérico empregado para avançar do tempo  $t = t_n$  até  $t = t_{n+1}$  pode ser definido como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial r} &= -\frac{2}{r} G \\ \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{G^2}{F} + p \right) &= -\frac{2}{r} \frac{G^2}{F} \\ \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{GH}{F} \right) &= -\frac{2}{r} \frac{GH}{F} \end{aligned} \tag{4}$$

$$\left. \begin{aligned} F &= \hat{F}_n(r) \\ G &= \hat{G}_n(r) \\ H &= \hat{H}_n(r) \end{aligned} \right\} \text{ para } t = t_n$$

onde

$$F = \hat{F}_n(r, t), G = \hat{G}_n(r, t) \text{ e } H = \hat{H}_n(r, t).$$

Para aproximar os campos  $F$ ,  $G$  e  $H$  no instante  $t = t_{n+1}$ , no problema não homogêneo descrito na equação (4), é empregar uma técnica de fatoração de operador, descrita em detalhes por Martins-Costa e Saldanha da Gama (2001). A técnica consiste em uma decomposição do operador definido na equação (4) de modo que sua parte meramente hiperbólica – ou seja, o sistema homogêneo associado – seja separada de sua parte puramente evolutiva no tempo – um

sistema ordinário. Essa técnica dá origem a uma aproximação inicial, obtida avançando no tempo através das equações que representam o problema homogêneo, empregando o método de Glimm.

Uma vez que essa aproximação tenha sido obtida, a aproximação numérica para a solução  $(F, G, H)$  no instante  $t_{n+1}$  é finalmente encontrada, avançando no tempo para resolver o seguinte problema evolutivo no tempo, com o mesmo passo  $\Delta t = t_{n+1} - t_n$  através das equações:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial t} = -\frac{2}{r}G \\ \frac{\partial G}{\partial t} = -\frac{2}{r}\frac{G^2}{F} \\ \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{2}{r}\frac{GH}{F} \end{array} \right. \quad \text{com} \quad \left. \begin{array}{l} F = \hat{F}_{n+1}(r) \\ G = \hat{G}_{n+1}(r) \\ H = \hat{H}_{n+1}(r) \end{array} \right\} \quad \text{para} \quad t = t_n \quad (5)$$

como segue:

$$\begin{aligned} F &= \hat{F}_{n+1}(r) \approx \tilde{F}_{n+1}(r) - \left\{ \frac{2}{r} \tilde{G}_{n+1}(r) \right\} \Delta t \\ G &= \hat{G}_{n+1}(r) \approx \tilde{G}_{n+1}(r) - \left\{ \frac{2}{r} \frac{[\tilde{G}_{n+1}(r)]^2}{\tilde{F}_{n+1}(r)} \right\} \Delta t \\ H &= \hat{H}_{n+1}(r) \approx \tilde{H}_{n+1}(r) - \left\{ \frac{2}{r} \frac{\tilde{G}_{n+1}(r) \tilde{H}_{n+1}(r)}{\tilde{F}_{n+1}(r)} \right\} \Delta t \end{aligned} \quad (6)$$

calculados em  $t_{n+1}$  e considerando  $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ .

Os campos  $\tilde{F}_{n+1}(r)$ ,  $\tilde{G}_{n+1}(r)$  e  $\tilde{H}_{n+1}(r)$ , usados como condição inicial em (5), são obtidos avançando-se  $\Delta t$  no tempo, através do método de Glimm, com o uso do problema homogêneo abaixo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial r} = 0 \\ \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{G^2}{F} + p \right) = 0 \\ \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{GH}{F} \right) = 0 \end{array} \right. \quad \text{com} \quad \left. \begin{array}{l} F = \hat{F}_n(r) \\ G = \hat{G}_n(r) \\ H = \hat{H}_n(r) \end{array} \right\} \quad \text{para} \quad t = t_n \quad (7)$$

Em outras palavras,  $\tilde{F}_{n+1}(r)$ ,  $\tilde{G}_{n+1}(r)$  e  $\tilde{H}_{n+1}(r)$  e são as soluções de (7) obtidas no instante  $t = t_{n+1}$ . A principal idéia do esquema de Glimm (Smoller, 1983) é reunir adequadamente a solução de tantos problemas de Riemann quantos forem desejados para avançar sucessivamente do instante  $t = t_n$  até o instante  $t = t_{n+1}$ . O método de Glimm, desenvolvido especificamente para lidar com problemas descontínuos, preserva a magnitude e a posição das ondas de choque, dentro de uma incerteza de  $\Delta x$  (largura de cada degrau). Tais características não são encontradas nos procedimentos numéricos usuais (por exemplo, elementos finitos e diferenças finitas). Além disso, o método de Glimm oferece uma clara vantagem na redução dos requisitos de armazenamento computacional em comparação com outras metodologias, como o método de elementos finitos com um procedimento de captura de choque; no entanto, sua limitação a problemas unidimensionais é uma importante desvantagem. Para empregar este esquema, utiliza-se uma função constante por partes para aproximar os dados iniciais, como segue:

$$\left. \begin{aligned} F &= \hat{F}_n(r) \approx F_{n_i} = \hat{F}_n(r_i + \theta_n \Delta r) \\ G &= \hat{G}_n(r) \approx G_{n_i} = \hat{G}_n(r_i + \theta_n \Delta r) \\ H &= \hat{H}_n(r) \approx H_{n_i} = \hat{H}_n(r_i + \theta_n \Delta r) \end{aligned} \right\} \text{ para } r_i - \frac{\Delta r}{2} < r < r_i + \frac{\Delta r}{2} \quad (8)$$

onde

$\theta_n$  é um número randomicamente escolhido no intervalo aberto  $(-1/2, 1/2)$  e

$\Delta r$  é a largura de cada degrau ( $\Delta r = r_{i+1} - r_i$ ).

As aproximações acima para os dados iniciais dão origem, para cada dois passos consecutivos, ao seguinte problema de Riemann – cuja solução detalhada é apresentada em Martins-Costa e Saldanha da Gama (2001):

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial r} &= 0 \\
 \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{G^2}{F} + p(F) \right) &= 0 \\
 \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{GH}{F} \right) &= 0
 \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned}
 (F, G, H) &= (F_{n_i}, G_{n_i}, H_{n_i}) && \text{para } t = t_n, \quad -\infty < r < r_i + \frac{\Delta r}{2} \\
 (F, G, H) &= (F_{n_{i+1}}, G_{n_{i+1}}, H_{n_{i+1}}) && \text{para } t = t_n, \quad r_{i+1} - \frac{\Delta r}{2} < r < \infty
 \end{aligned}$$

Denotando por  $F_{n_i}^R$ ,  $G_{n_i}^R$ , e  $H_{n_i}^R$  a solução generalizada do problema de Riemann (9), a aproximação para a solução de (7) no instante é dada por:

$$\begin{aligned}
 F &= \hat{F}_{n+1}(r) \approx F_{n_i}^R(r, t_{n+1}) && \text{para } r_i < r < r_{i+1} \\
 G &= \hat{G}_{n+1}(r) \approx G_{n_i}^R(r, t_{n+1}) && \text{para } r_i < r < r_{i+1} \\
 H &= \hat{H}_{n+1}(r) \approx H_{n_i}^R(r, t_{n+1}) && \text{para } r_i < r < r_{i+1}
 \end{aligned} \tag{10}$$

Para evitar interações entre choques associados a problemas de Riemann adjacentes, o avanço no tempo  $\Delta t$ , e conseqüentemente,  $t_{n+1}$ , deve ser escolhido de forma que a condição de Courant-Friedrich-Lewy (Smoller, 1983) seja satisfeita:

$$t_{n+1} - t_n \leq \frac{\Delta r}{2|\lambda|_{\max}} \tag{11}$$

onde

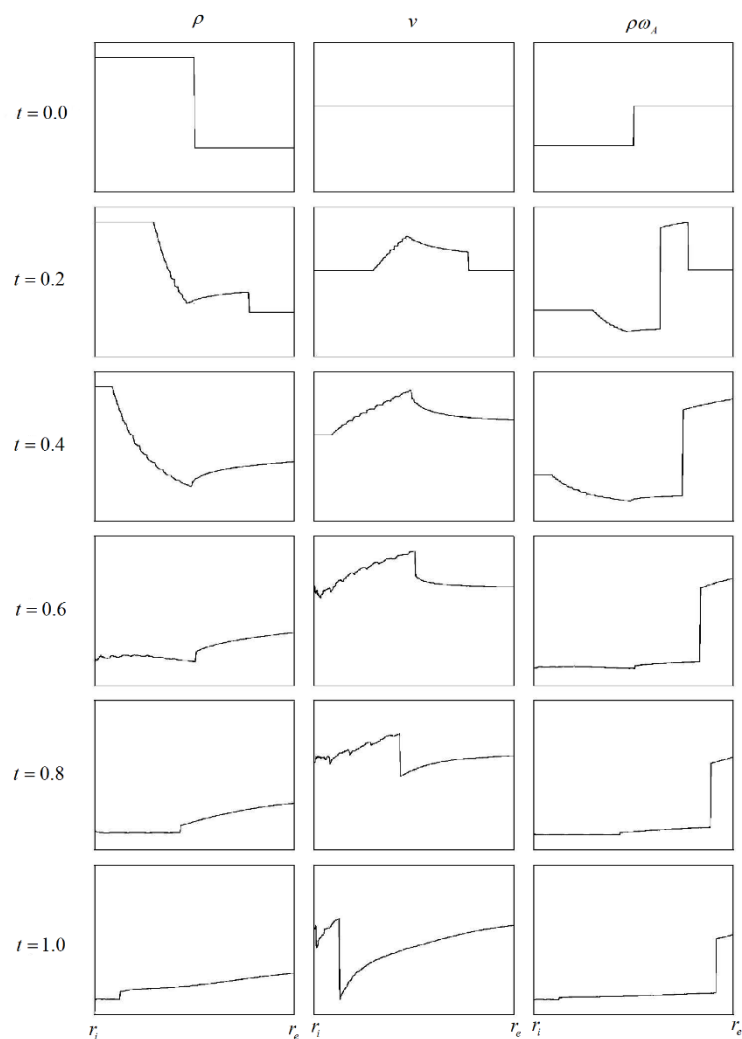
$|\lambda|_{\max}$  é a velocidade máxima (em valor absoluto) de propagação, considerando todos os problemas de Riemann.

## ALGUNS RESULTADOS

As Figuras 1, 2 e 3 mostram a evolução da densidade do ar, da velocidade e da concentração do poluente em função da posição radial em cinco instantes de tempo selecionados.

Esses resultados foram obtidos empregando o esquema de Glimm combinado com uma técnica de fatoração de operadores para levar em conta a parte não homogênea do problema hiperbólico – que surge naturalmente devido à geometria esférica considerada. Em todos os casos considerados, os dados iniciais para densidade, velocidade e concentração são apresentados nos três gráficos mostrados na primeira linha.

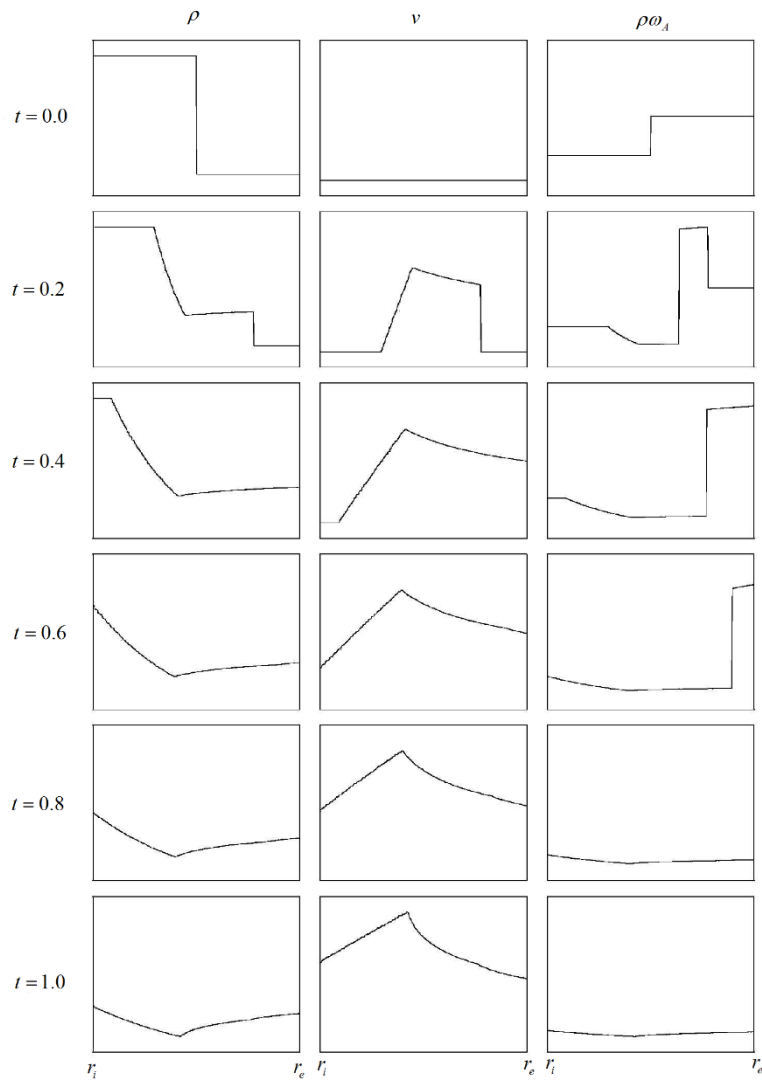
Figura 1. Variação da densidade do ar, da velocidade e da concentração do poluente por unidade de volume com a posição radial  $r$  ( $r_i < r < r_e$ ). Dados iniciais: função degrau para  $\rho$ ,  $v = 0$  e função degrau para  $\omega_A$ . Casca esférica com  $r_i = 0.01$  e  $r_e = 1.01$ .



Fonte: Autores

Em todas as figuras, os dados iniciais consistem em um valor constante para a velocidade ( $v = 0$ ), enquanto uma função degrau (com descontinuidade em  $r = (r_i + r_e) / 2$ ) é prescrita tanto para a densidade (com  $\rho_L > \rho_R$ ) quanto para a concentração (com  $\omega_{AL} < \omega_{AR}$ ).

Figura 2. Variação da densidade do ar, da velocidade e da concentração do poluente por unidade de volume com a posição radial  $r$  ( $r_i < r < r_e$ ). Dados iniciais: função degrau para  $\rho$ ,  $v = 0$  e função degrau para  $\omega_A$ . Casca esférica com  $r_i = 1.0$  e  $r_e = 2.0$ .

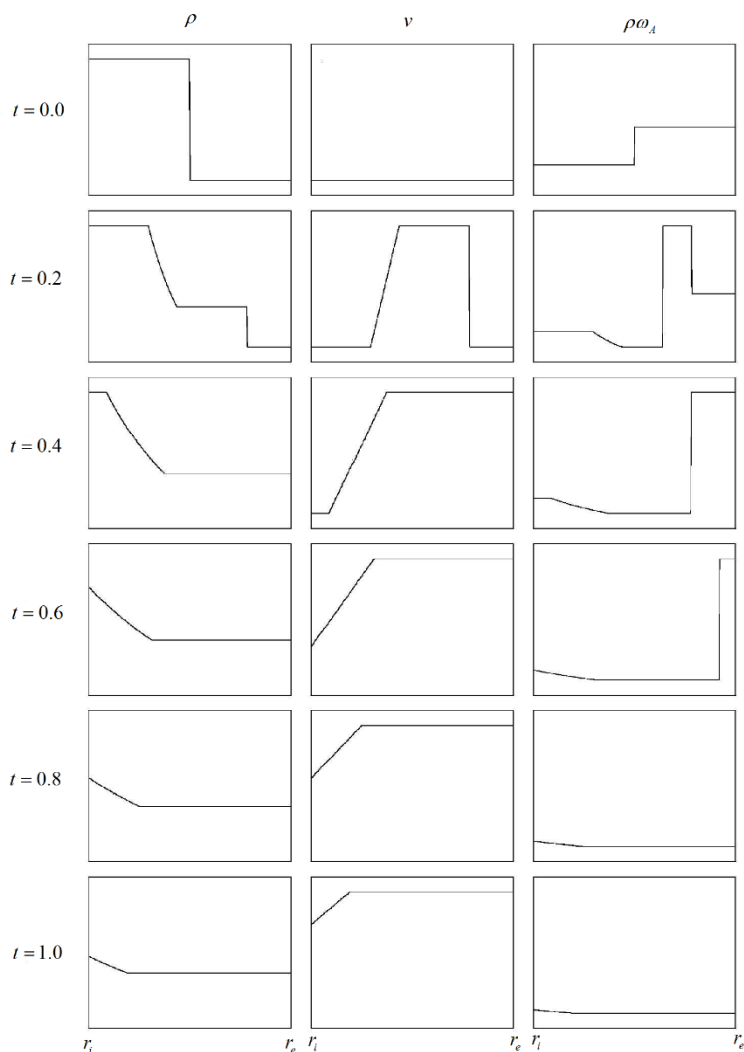


Fonte: Autores

Os resultados foram obtidos considerando uma casca esférica com espessura unitária. A influência da curvatura no comportamento de  $\rho$ ,  $v$ , e  $\rho\omega_A$  pode ser observada comparando as três figuras.

As Figuras 1, 2 e 3 mostram que, à medida que a curvatura da casca esférica aumenta, os choques tornam-se menos visíveis. De fato, o efeito de dissipação de choque pode ser associado a um aumento na curvatura.

Figura 3. Variação da densidade do ar, da velocidade e da concentração do poluente por unidade de volume com a posição radial  $r$  ( $r_i < r < r_e$ ). Dados iniciais: função degrau para  $\rho$ ,  $v = 0$  e função degrau para  $\omega_A$ . Casca esférica com raio infinito, porém mantendo  $r_e - r_i = 1.0$ .



Fonte: Autores

## CONCLUSÕES

O método de Glimm, além de preservar as magnitudes e posições das ondas de choque, é uma ferramenta conveniente para resolver problemas não lineares unidimensionais, apresentando vantagens como baixos custos de armazenamento e baixo esforço computacional em comparação com outros métodos numéricos. Além disso, combinado com uma técnica de partição de operadores, essa metodologia numérica permite a aproximação de um sistema não linear de equações diferenciais parciais não homogêneas que modela (matematicamente) o transporte de um poluente na atmosfera, admitindo uma simetria esférica.

## REFERÊNCIAS

- Jacobson, M.Z., *Fundamentals of Atmospheric Modelling*, Ed. Cambridge, New York, 2000.
- John, F., *Partial Differential Equations*, Ed. Springer-Verlag, Berlin, 1982.
- Martins-Costa, M. L.; Rachid, F. B. F.; Saldanha da Gama, R. P.; Saldanha da Gama, R. M., *Combining Glimm's Scheme and Operator Splitting for Simulating Constrained Flows in Porous Media*. Axioms, v. 13, p. 587, 2024.
- Martins-Costa, M.L. and Saldanha da Gama, R.M., *Numerical Simulation of One-Dimensional Flows with Shock Waves*, Int. J. Numer. Meth. Engng., Vol. 52, No. 10, pp. 1047-1067, 2001.
- Perkins, H.C., *Air Pollution*, Ed. McGraw-Hill, Tokyo, 1974.
- Saldanha da Gama, R.M., *An Alternative Procedure for Simulating the Dynamical Response of Non-Linear Elastic Rods*, Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 29, pp. 123-139, 1990.
- Smoller, J., *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*, Ed. Springer-Verlag, New York, 1983